Capítulo 1

O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

1ª Lição

1.1 Resultados preliminares

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados *vetores* e também pontos, dependendo do que é mais sugestivo no contexto.
Introduz-se de modo natural as noções de :
(i) Adição (soma): Se $x = (x_1, .., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ são dois vetores (elementos) de $\mathbb{R}^n$, então

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

(ii) Multiplicação (Produto) por um escalar: Se $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha.x = (\alpha.x_1, .., \alpha.x_n)$$

O elemento *zero* de $\mathbb{R}^n$ é $\theta = (0, ..., 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Os conceitos de adição (soma) de vetores e multiplicação (Produto) por un escalar determinam em $\mathbb{R}^n$ a estrutura de um espaço vetorial. Todavia, não são suficientes para definir os conceitos de distância e ângulos.

1.1.1 Produto Interno Euclidiano de $\mathbb{R}^n$

O produto euclidiano em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}$, denotada por $x.y$ e definida por

$$x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i, \text{onde } x = (x_1, .., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \tag{1.1}$$

a qual satisfaz:

(a) $x.y = y.x$ $\qquad$ (b) $(x+y).z = x.z + y.z$

(c) $(\alpha.x).y = \alpha.(x.y)$ $\qquad$ (d) $x.x > 0, \text{se } x \neq 0$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com este produto interno é chamado de *n-espaço euclidiano.*

A <u>*norma euclidiana*</u> (ou comprimento) de um vetor x é o número real não negativo

$$|x| = (x.x)^{1/2} \tag{1.2}$$

Proposição 1. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*
(i) $|x.y| \leq |x|\,.\,|y|$ *(Desigualdade de Cauchy)*
(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(Desigualdade Triângular)*

Demonstração - (i) Se $y = 0$, então ambos os lados são nulos. Assim, supõe-se $y \neq 0$. para cada $t \in \mathbb{R}$ tem-se pelas propriedades **(a) - (c)** de produto interno que:
$(x+ty).(x+ty) = x.x + 2tx.y + t^2 y.y$
Dai, e de (1.2) tem-se

$$(*)\ \ 0 \leq |x + t.y|^2 = |x|^2 + 2tx.y + t^2\,|y|^2 = p(t)$$

O polinômio quadrático p(t) tem um mínimo, pois $|y| > 0$,
em $t = t_0 = -\dfrac{2x.y}{2\,|y|^2} = -\dfrac{x.y}{y.y}$
Substituíndo este valor de t em (*) resulta

$$0 \leq |x + t.y|^2 = |x|^2 - \frac{2\,|x.y|^2}{|y|^2} + \frac{|x.y|^2}{|y|^2}$$

Ou seja,

$$0 \leq |x + t.y|^2 = |x|^2 - \frac{|x.y|^2}{|y|^2}$$

Dai,

$$|x.y|^2 \leq |x|^2\,.\,|y|^2$$

Extraindo a raiz tem **(i)**.

(ii) Temos que $|x+y|^2 = (x+y).(x+y) = |x|^2 + 2x.y + |y|^2$
Pela desigualdade de Cauchy $|x.y| \leq |x|\,.\,|y|$. Assim,

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2\,|x|\,.\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

o que acarre **(ii)**. ■

A <u>*distância euclidiana*</u> entre x e y é o número real não negativo

$$d(x,y) = |x-y| \tag{1.3}$$

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, então $x - z = (x-y) + (y-z)$.
Aplicando **(ii)** da proposição 1, tem-se

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

A qual justifica o nome de desigualdade triângular.
Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são não nulos, o *ângulo* θ *entre* x *e* y é definido por

$$Cos\ \theta = \frac{x.y}{|x|\,|y|},\ \ 0 \leq \theta \leq \pi \tag{1.4}$$

A fórmula (1.4) satisfaz para n=2, 3 as "intuições"da geometria analítica.
Os vetores x e y são <u>*ortogonais*</u> se $x.y = 0$, em outras palavras, se o ângulo θ é um ângulo reto. Tem-se

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x.y$$

ou por (1.4)

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\,|x|\,|y|\,Cos\ \theta$$

a qual é a lei dos cosenos da trigonometria.

1.1.2 Bases Ortogonais em $\mathbb{R}^n$

Qualquer conjunto de vetores $B = \{v_1, .., v_n\}$ linearmente independente de $\mathbb{R}^n$ tal que dado $v \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,\ \text{com}\ \alpha_i \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

é uma *base de* $\mathbb{R}^n$. A expressão (1.5) é chamada de *combinação linear.*
Uma base $B = \{v_1, .., v_n\}$ é chamada ortonormal, se

$$v_i.v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j,\ i,j = 1,...,n \end{cases}$$

O símbolo δ_{ij} foi introduzido pelo matemático Kronecker, e consequentemente é chamado de δ de Kronecker.
Os vetores canônicos ou unitários de $\mathbb{R}^n$ são $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..,$ $e_n = (0,..,0,1)$ que formam uma base ortonormal chamada base canônica.
Note que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$x = (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Finalmente, lembre-se que cada $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser unicamente dado como combinação linear

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \tag{1.6}$$

1.1.3 Geometria Elementar de $\mathbb{R}^n$

Os conceitos de retas, planos, círculos e esferas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ têm analogos em $\mathbb{R}^n$ para qualquer dimensão n.

RETA

Definição 1 (Reta)**.** *Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ com $x_1 \neq x_2$. A reta que passa por x_1 e x_2 é dada*

$$\mathfrak{L} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = tx_1 + (1-t)x_2,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Fazendo $z = x_1 - x_2$ então $\mathfrak{L}$ pode ser reescrito por

$$\mathfrak{L} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = x_2 + tz,\ t \in \mathbb{R}\}$$

No plano $\mathbb{R}^2$ a equação vetorial $x = x_2 + tz$ é definida pelas "equações paramétricas"da reta que passa por $x_1 = (a, b), x_2 = (c, d)$ são

$$\begin{aligned} x &= c + t(a-c) \\ y &= d + t(b-d) \end{aligned}$$

O *segmento de reta* ligando x_1 e x_2 é

$$\overline{x_1x_2} = \{x \in \mathbb{R}^n; x = tx_1 + (1-t)x_2,\ t \in [0,1]\}$$

HIPERPLANO

Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$\mathfrak{P} = \{x \in \mathbb{R}^n; (x_1 - x_2)(x - x_2) = 0\}$$

O conjunto $\mathfrak{P}$ é chamado um hiperplano passando por x_2.
Geometricamente imagine assim:

chama-se r_1 e r_2 de perpendicular, se $(x_1 - x_2)(x - x_2) = 0$. Assim, $\mathfrak{P}$ mapeia todas as retas perpendiculares a r_1 a partir de r_2 "acima".
fazendo $z = x_1 - x_2$ e $\alpha = z.x_2$, então
$(x_1 - x_2)(x - x_2) = z.(x - x_2) = z.x - z.x_2 = z.x - \alpha$.
Dai, a definição de hiperplano pode ser dada de modo simplificado, por:

Definição 2 (Hiperplano)**.** *Um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto da forma*

$$\mathfrak{H} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ z.x = \alpha\}$$

onde $z \neq \theta$ e α são dados (fixados).

Observação 1. *Um hiperplano é: um ponto, se n = 1, uma reta para n = 2, um plano para n = 3.*

Observação 2. *Um hiperplano* $\mathfrak{H} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ z.x = \alpha\}$ *é* *paralelo* *a* $\mathfrak{P} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ z.x = \alpha_1\}$ *para* $\alpha \neq \alpha_1$.

Observação 3. *Se* $\alpha_1 = 0$, *então* $\mathfrak{P}$ *contém* θ, *e* $\mathfrak{P}$ *é um subespaço de* $\mathbb{R}^n$, *com dimensão n-1.*

Exemplo 1. *Encontrar o hiperplano* $\mathfrak{P}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *o qual contém os quatro pontos:* $e_1, e_1 + 2e_2, e_2 + 3e_3, e_3 + 4e_4$.
Todo $x \in \mathfrak{P}$ *deve satisfazer* $z.x = \alpha$ *onde* z *e* α *devem ser encontrados. Fazendo*

$$\begin{aligned} x = e_1 = (1,0,0,0) &\Rightarrow \alpha = z.e_1 = (z_1,z_2,z_3,z_4).(1,0,0,0) = z_1 \\ x = e_1 + 2e_2 = (1,2,0,0) &\Rightarrow \alpha = (z_1,z_2,z_3,z_4).(1,2,0,0) = z_1 + 2z_2 \\ x = e_2 + 3e_3 = (0,1,3,0) &\Rightarrow \alpha = (z_1,z_2,z_3,z_4).(0,1,3,0) = z_2 + 3z_3 \\ x = e_3 + 4e_4 = (0,0,1,4) &\Rightarrow \alpha = (z_1,z_2,z_3,z_4).(0,0,1,4) = z_3 + 4z_4 \end{aligned}$$

Dai, as componentes z_1, z_2, z_3, z_4 *de* z *satisfazem*

$$z_1 = \alpha, z_2 = 0, z_3 = \alpha/3, z_4 = \alpha/6$$

Tomando $\alpha = 6$ *(por conveniência) tem-se*

$$\mathfrak{P} = \{x \in \mathbb{R}^n; 6x_1 + 2x_3 + x_4 = 6\}$$

Observação 4. *O hiperplano* $\{x \in \mathbb{R}^n; z.x \geq \alpha\}$ *é dito fechado.*

Observação 5. *O hiperplano* $\{x \in \mathbb{R}^n; z.x > \alpha\}$ *é dito aberto.*

Observação 6. *Um hiperplano* $\{x \in \mathbb{R}^n; z.x = \alpha\}$ *divide o* $\mathbb{R}^n$ *em dois subespaços. Na verdade,* $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; z.x > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n; z.x < \alpha\}$.

ESFERA

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| = \delta\}$ é chamado de (n-1) - esfera com centro em x_0 e raio δ:
Para n = 1, S consiste dos pontos $x = \pm\delta$, para n =2, S é um círculo, e para n = 3 é uma esfera.
O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < \delta\}$ é uma n-bola aberta centrada em x_0 e raio δ, e $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq \delta\}$ é uma n-bola fechada com centro em x_0 e raio δ.

CONJUNTO CONVEXO

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Então K é um *conjunto convexo*, se um segmentode reta juntando dois pontos quaisquer de K está contido em K.

Exemplo 2. $\mathbb{R}^n$ *é um conjunto convexo.*

Exemplo 3. *O conjunto vazio e conjuntos de um único ponto são conjuntos convexos.*

Exemplo 4. *Bolas e hiperplanos são conjuntos convexos.*

Para conjuntos em espaços com dimensão acima de três, nem sempre é fácil, intuitivamente, dizer que estes conjuntos são convexos ou não. Para mostrar que um conjunto K é convexo, usando a definição, dve-se provar que, para todo $x_1, x_2 \in K$ e $t \in [0,1]$, o "ponto"$x = tx_1 + (1-t)x_2$ também, pertence a K. Se $x_1 = x_2$, então $x \in K$, desde que $x = x_1 = x_2$.

Exemplo 5. *Todo hiperplano fechado é um conjunto convexo. De fato, seja* $\mathfrak{H} = \{x \in \mathbb{R}^n; z.x \geq \alpha\}$ *e* $z \neq \theta$.
Dados $x_1, x_2 \in \mathfrak{H}$ *e* $x = tx_1 + (1-t)x_2$ *com* $t \in [0,1]$, *então* $z.x_1 \geq \alpha$ *e* $z.x_2 \geq \alpha$.
Sendo $t \geq 0, 1-t \geq 0$, *tem-se que* $tz.x_1 \geq t\alpha$ *e* $(1-t)z.x_2 \geq (1-t)\alpha$. *Dai,* $z.x = tz.x_1 + (1-t)z.x_2 \geq t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha$.
Logo, $x = tx_1 + (1-t)x_2 \in \mathfrak{H}$.

1.1.4 Noção Topológica em $\mathbb{R}^n$

Definição 3. *Uma vizinhança de um ponto* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *é uma n-bola* $V = \{x \in \mathbb{R}^n, \ |x - x_0| < \delta\}$, *onde* $\delta > 0$ *é chamado o raio de V. Também usa-se a notação* V_δ.

Definição 4. *Seja A um conjunto qualquer de* $\mathbb{R}^n$. *Um ponto x é chamado ponto interior de A, se existe alguma vizinhança V de x tal que* $V \subset A$.

Se alguma vizinhança de x está contida no complementar $A^c = \mathbb{R}^n - A$, então x é um *ponto exterior* de A.
Se qualquer vizinhança de x, contém pelo menos um ponto de A, e pelo menos um ponto de $A^c = \mathbb{R}^n - A$, então x é um *ponto de fronteira* de A ou A^c.

Exemplo 6. *Seja* V_δ *uma vizinhança de* x_0. *Mostra-se que todo ponto de* V_δ *é ponto interior de* V_δ.
De fato, dado $x \in V_\delta$, *seja* $r = \delta - |x - x_0| > 0$ *e seja* U_r *outra vizinhança de x. Se* $y \in U_r$, *então* $y - x_0 = (y - x) + (x - x_0)$ *e pela desigualdade triângular*

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < r + |x - x_0| = \delta$$

Dai, $y \in V_\delta$. *Isto mostra que* $U_r \subset V_\delta$. *Logo, x é um ponto interior de V.*

Definição 5. *O interior de um conjunto A é o conjunto de todos os pontos interiores de A, denotado por Int(A) ou* $\mathring{A}$.

Definição 6. *O conjunto de todos os pontos de fronteiras de A é chamado de fronteira de A, denotado por* ∂A *ou fr(A).*

Definição 7. *O conjunto $A \cup \partial A$ é o fecho de A, e é denotado por $\overline{A}$ ou Fc(A).*

No exemplo precedente, int(V) = V e ∂V é a esfera de dimensão n-1 de raio δ.

Exemplo 7. **(i)** *Se $A = (a, b] \subset \mathbb{R}$. Então Sup(A) $= b \in \partial A$.*
(ii) *Se $A = \mathbb{R}^n$, então Int(A) $= \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ e $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$.*

Note que $\overline{A}$ consiste de todos os pontos não exteriores a A. Assim,
$(\overline{A})^c = Int(A^c)$.
É, também, verdade que $Int(A) \subset A$. Se Int(A) e A são iguais, então A é chamado um *conjunto aberto*.

Definição 8. *Um conjunto A é aberto, se todo ponto de A é interior a A.*

Note que qualquer vizinhança V_δ e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos.

Definição 9. *Um conjunto A é fechado, se seu complementar A^c for aberto.*

Noutras palavras: A é un conjunto fechado, se A contém todos seus pontos de fronteira. ■

1.2 Topologia Elementar de $\mathbb{R}^n$

2ª Lição

1.2.1 Funções

O objetivo é estudar funções em $\mathbb{R}^n$. Todavia, relembra-se alguns conceitos pré-concebidos.
Sejam A e B conjuntos. O conjunto produto cartesiano, denotado por $A \times B$ consiste de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A, b \in B$. Ou seja

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$$

Exemplo 8. *Se $A = \{1, 2, ..., n\}$ e $B = \{1, 2, ..., m\}$, então*
$A \times B = \{(i, j); i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., m\}$

Se $A_1, A_2, .., A_n$ são conjuntos, então on-conjunto produto cartesiano, denotado por $A_1 \times A_2 \times .. \times A_n$ é formado por todas as n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, .., a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para cada $i = 1, 2, .., n$. Em particular $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$.

Exemplo 9. *Se $A = [a, b]$ e $B = [c, d]$, então*
$A \times B = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$ *é um retângulo.*

Definição 10. *Qualquer subconjunto f do produto cartesiano $A \times B$ é chamada uma relação entre A e B. A relação f é chamada uma função, se para todo $a \in A$ existe "exatamente"um $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. O elemento b é denotado por f(a).*

Notação: O domínio de de f, denotado por D(f) é o conjunto

$$D(f) = \{x \in A \; ; \; f(x) \; existe \; \} \subset A$$

A imagem de f, denotada por Im(f) é

$$Im(f) = \{f(x) \in B \; ; \; x \in D(f)\} \subset B$$

Observação 7. *Se para todo $b \in B$ existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$, dizemos que f é sobrejetora ou simplesmente sobre. Neste caso, $Im(f) = B$.*

Observação 8. *Dizemos que a função f é injetora (ou univalente), se $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$. Equivale, se $a_1 \neq a_2$ então $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

Observação 9. *Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que é uma função com valores reais.*

Observação 10. *Quando $f : A \to \mathbb{R}^n$, é chamada de função vetorial.*

Observação 11. *Uma função vetorial $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é dita usualmente uma transformação [1] de D em $\mathbb{R}^m$.*

Observação 12. *Se f, g são funções, com mesmo domínio A e valores em um espaço vetorial, por exemplo $\mathbb{R}^n$, podemos definir a soma de funções por:*

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad \forall x \in A$$

Observação 13. *Se f tem valores em um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e ϕ é uma função com valores reais, ambas com mesmo domínio A, pode ser definido o produto de funções $\phi.f$, uma nova função com valores em V, dada por:*

$$(\phi.f)(a) = \phi(a).f(a), \quad \forall x \in A$$

1.2.2 Limite e Continuidade de Transformações

Suponha $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $n.m \in \mathbb{N}$.
Uma vizinhança "furada"de x_0, será usada a notação $\dot{U}_\delta$ ou $\dot{U}$ é uma vizinhança centrada em x_0, sem x_0.
Assume-se que D contém algumas $\dot{U}$ de x_0. Por definição de *limite* em x_0, relembre-se, x_0 não necessita estar em D. Se $x_0 \in D$, o valor de f em x_0 é irrelevante para o estudo de limite.

LIMITE

[1] As vezes, diz-se "aplicação"

Definição 11. *Seja $\dot{U} = U$ uma vizinhança de x_0, sem x_0 e*
$F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se para toda vizinhança V de y_0, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $F(U) \subset V$, então y_0 é o <u>*limite*</u> *da transformação F em x_0.*

Denotamos. $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ ou $F(x) \to y_0$ quando $x \to x_0$.

Observação 14. *Observamos que o raio de U é pequeno , o suficiente tal que $U \subset D$.*

Observação 15. *Se ϵ, δ são os raios de U e V respectivamente, a definição acima pode ser refraseada por:*
$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} F(x)$, equivale , que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - F(x_0)| < \epsilon \ \textit{ sempre que } \ 0 < |x - x_0| < \delta$$

onde o nùmero $\delta = \delta(\epsilon)$, pode depender também de x_0.

Proposição 2. *Sejam as funções $F, G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tais que*
$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ e $z_0 = \lim\limits_{x\to x_0} G(x)$, então:
(1) $y_0 + z_0 = \lim\limits_{x\to x_0} [F(x) + G(x)]$
(2) $\alpha y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} [\alpha F(x)]$ *onde* $\alpha \in \mathbb{R}$
(3) $y_0.z_0 = \lim\limits_{x\to x_0} [F(x).G(x)]$

Demonstração - (1) Sejam V_ϵ uma vizinhança de $y_0 + z_0$, $V^1_{\epsilon/2}$ vizinhança de y_0 e $V^2_{\epsilon/2}$ vizinhança de z_0. Se $y \in V^1_{\epsilon/2}$, $z \in V^2_{\epsilon/2}$, tem-se que
$(y+z)-(y_0+z_0) = (y-y_0)+(z-z_0)$. Usando desigualdade triângular, resulta

$$|(y + z) - (y_0 + z_0)| \leq |y - y_0| + |z - z_0| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Daí, $y + z \in V_\epsilon$.
Por hipótese, existem vizinhanças "furadas"U^1, U^2 de x_0 tais que
$F(U^1) \subset V^1_{\epsilon/2}$, $G(U^2) \subset V^2_{\epsilon/2}$. Seja $U = U^1 \cap U^2$, a qual é uma vizinhança "furada"de x_0.
Se $x \in U$, então $(F + G)(x) \in V\epsilon$, logo $(F + G)(U) \subset V\epsilon$.
(2) Exercício.
(3) Sejam $V = V_1(y_0)$(vizinhança de raio 1 de y_0) e $\dot{U} = \dot{U}(x_0)$(vizinhança de x_0 sem x_0, raio não fixado) tal que$F(\dot{U}) \subset V$, pois $|F(x) - y_0| < 1$.
Denotamos $C = \max\{|y_0| + 1, |z_0|\}$.
Note que, se $y \in V$, então $y = y_0+(y-y_0)$, e $|y| \leq |y_0|+|y-y_0| \leq |y_0|+1 < C$.
Observe que $F(x).G(x) - y_0.z_0 = F(x).G(x) - F(x).z_0 + F(x).z_0 - y_0.z_0$. Pela desigualdade triângular e de Cauchy, tem-se

$$(*) \quad |F(x).G(x) - y_0.z_0| \leq |F(x)|\,|G(x) - z_0| + |z_0|\,|F(x) - y_0|$$

Dado $\epsilon > 0$, definimos $V^1 = V_{\epsilon/2C}(y_0),\ V^2 = V_{\epsilon/2C}(z_0),\ \widetilde{V}^1 = V^1 \cap V$.
(se $\epsilon \leq 2C$, então $\widetilde{V}^1 = V^1$)
Por hipótese existem $U_1 = \dot{U}_1(x_0), U_2 = \dot{U}_2(x_0)$ tais que

$$F(U_1) \subset \widetilde{V}^1 \Leftrightarrow |F(x) - y_0| < \epsilon/2C, \quad \forall x \in U_1$$

$$G(U_2) \subset V^2 \Leftrightarrow |G(x) - z_0| < \epsilon/2C, \quad \forall x \in U_2$$

Fazemos $U = U_1 \cap U_2$. Para todo $x \in U$, tem-se $F(x) \in V$. Ou seja, $|F(x)| \leq C$.
Disto tudo e (*), pode-se escrever:

$$|F(x).G(x) - y_0.z_0| \leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} = \epsilon, \quad \forall x \in U \qquad \blacksquare$$

Definição 12. *Uma transformação F é dita limitada em um conjunto A, se existe K tal que* $|F(x)| \leq K,\ \forall x \in A$.

<u>LIMITE DE COMPONENTES</u>

Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação tal que $F(x) = \big(f^1(x), ..., f^m(x)\big)$, onde $f^i : D \to \mathbb{R}$ é chamada de componente de F (com componentes na base canònica de $\mathbb{R}^m$), para cada i = 1,.., m.

Proposição 3. $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} F(x) \Leftrightarrow y_0^i = \lim\limits_{x \to x_0} f^i(x)$, *para cada i = 1,.., m.*

Demonstração - Seja $U = U_\delta(x_0)$. Por hipótese, existe $V = V_\epsilon(y_0)$ tal que $F(U) \subset V$. Ou seja, se $x \in U$, então $F(x) \in V$. Em outros termos,

$$|F(x) - y_0|^2 = \left|\big(f^1(x), ..., f^m(x)\big) - \big(y_0^1, ..., y_0^m\big)\right|^2 = \left|\big(f^1(x) - y_0^1, .., f^m(x) - y_0^m\big)\right|^2$$

Usando a métrica euclidiana

$$|F(x) - y_0|^2 = \big(f^1(x) - y_0^1\big)^2 + ... + (f^m(x) - y_0^m)^2 < \epsilon^2 \ \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Logo,

$$\big(f^i(x) - y_0^i\big) < \epsilon, \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta, \ \text{ para cada } \ i = 1, .., m.$$

Portanto,

$$y_0^i = \lim_{x \to x_0} f^i(x), \ \text{ para cada } \ i = 1, .., m.$$

Mostraremos a recíproca, por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|f^i(x) - y_0^i\right| < \epsilon/\sqrt{m}, \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta, \ \text{ para cada } \ i = 1, .., m.$$

Daí, $\big(f^i(x) - y_0^i\big)^2 < \epsilon^2/m$, o que acarreta

$$\big(f^1(x) - y_0^1\big)^2 + ... + (f^m(x) - y_o^m)^2 < \epsilon^2, \ \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Segue-se que

$$|F(x) - y_0| < \epsilon \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta$$

O que equivale

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} F(x) \quad \blacksquare$$

LIMITE AO LONGO DE RETAS

Proposição 4. *Se* $y_0 = \lim_{x \to x_0} F(x)$*, então para todo* $v \neq \theta$*, tem-se* $y_0 = \lim_{t \to 0} F(x_0 + tv)$*, com* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração - Seja $V = V(y_0)$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $F(x) \in V$ desde que $0 < |x - x_0| < \delta$. Escolhendo $0 < |t|_{\mathbb{R}} < \delta / |v|$, temos que

$$|(x_0 + tv) - tv| = |t|_{\mathbb{R}} |v| < \frac{\delta}{|v|} |v| = \delta$$

Consequentemente, $F(x_0 + tv) \in V$, $t \in U = \left(-\frac{\delta}{|v|}, \frac{\delta}{|v|} \right)$. Note que, U é um intervalo da reta centrado no zero. $\blacksquare$

Observação 16. *A proposição afirma que, se F tem um limite* y_0 *em* x_0*, então* y_0 *é também o limite quando* x_0 *é aproximado ao longo de qualquer reta passando por* x_0.

Observação 17. *Quando uma aplicação F não tem limite em* x_0*, frequentemente testa-se este fato, ao longo de várias "retas"ou "caminhos".*

Exemplo 10. *Considere* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}, & se \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Seja $x_0 = (0, 0)$*, suponha:*
(a) *Se* $y = 0$ *e* $v = e_1 = (1, 0)$*. Então* $F(x_0 + tv) = F(t, 0) = 1, \ \forall t \neq 0$.
Logo, $F(t, 0) \to 1$*, quando* $t \to 0$.
(b) *Se* $x = 0$ *e* $v = e_2 = (0, 1)$*. Então* $F(x_0 + tv) = F(0, t) = 0, \ \forall t \neq 0$.
Logo, $F(0, t) \to 0$*, quando* $t \to 0$.
Portanto F não tem limite em (0, 0).

Exemplo 11. *Considere* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2}, & se \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Novamente, considere $x_0 = (0, 0)$ *e*
(a) *Se* $v = (h, k) \neq (0, 0)$ *um vetor qualquer. Então*

$$F(x_0+tv)=F(th,tk)=\frac{(t^2k^2-th)^2}{t^4k^4+t^2h^2}=\frac{(tk^2-h)^2}{t^2k^4+h^2}\to\frac{h^2}{h^2}=1$$
quando $t\to 0$.
(b) *Se* $v=(h,h^2)+(0,0)$ *resulta* $F(th,t^2k^2)=0\to 0$ *quando* $t\to 0$.
Portanto F não tem limite em (0, 0).

Observação 18. *Note que, no exemplo precedente, há infinitas maneiras de aproximar ao longo de retas da origem, dando limite 1 e infinitas maneiras ao longo de parábolas do limite zero. Concluí-se que o limite de uma aplicação de várias variáveis é mais "delicado"que de uma.*

<u>CONTINUIDADE</u>

Aquí supõe-se x_0 no interior do domínio D da transformação F.

Definição 13. *Uma transformação F é contínua em* x_0, *se* $F(x_0)=\lim_{x\to x_0}F(x)$

Em termos vizinhança: F é contínua em x_0, se para toda vizinhança $V=V(y_0)$ existe uma vizinhança $U=U(x_0)$ tal que $F(U)\subset V$.

Exemplo 12. *Mostrar diretamente pela definição que* $F(x,y)=\sqrt{xy}$ *é contínua em zero. De fato, dado* $\epsilon>0$, *existe* $\delta>0$ *tal que*

$$|F(x,y)-F(0,0)|<\epsilon \;\text{ desde que }\; 0<x^2+y^2<\delta^2$$

Dado que $x^2\pm 2xy+y^2\geq 0$, *resulta que*

$$\sqrt{xy}\leq\sqrt{1/2}\sqrt{x^2+y^2}$$

Assim, como $F(0,0)=0$ *tem-se* $|F(x,y)-F(0,0)|=\sqrt{xy}$.
Portanto, dado $\epsilon>0$, *escolhe-se* $\delta=\sqrt{2}\epsilon$. *Logo,*

$$|F(x,y)|<\epsilon \;\text{ sempre que }\; 0<x^2+y^2<\delta^2$$

Observação 19. *Nem sempre, é uma tarefa fácil mostrar a continuidade de uam F, como no exemplo acima.*

Proposição 5. *F é contínua em* x_0 *s.s.s.* f^i *é contínua em* x_0, *para cada i = 1, 2,..., m.*

Demonstração - Idêntica a proposição anterior.

Exemplo 13. *Qualquer polinômio em n-variáveis é uma aplicação contínua.*

Exemplo 14. *Uma função racional do tipo* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *onde P(x) e Q(x) são polinômios com valores reais é contínua em seu domínio, isto é, nos x tais que* $Q(x)\neq 0$.

<u>LIMITE NO INFINITO</u>

Uma aplicação tem limite no infinito (∞) quando, para toda vizinhança $V=V(y_0)$ existe uma vizinhança $U=\{x;|x|>b\}$ do infinito tal que $F(U)\subset V$. Denotamos

$$y_0=\lim_{|x|\to\infty}F(x)$$

1.3 Seqüências em $\mathbb{R}^n$

3ª Lição

Definição 14. *Uma seqüência ou sucessão em $\mathbb{R}^n$ é uma função definida em $\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Ou seja, a cada $m \in \mathbb{N}$ é associado um único vetor $x_m \in \mathbb{R}^n$. Identificamos a função com sua imagem e denotamos $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_m). O vetor x_m é chamado de n-ésimo termo de (x_m).*

O conjunto dos termos de (x_m) é denotado por $\{x_1, x_2, ..., x_m, ...\}$ o qual pode ser finito ou não.

Exemplo 15. *Se $x_m = (-1)^m$, então a seqüência é -1, 1, -1,... e o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_m, ...\}$ tem só dois elementos -1 e 1.*

Definição 15. *Uma seqüência $(x_m), x_m \in \mathbb{R}^n$ converge para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_m - x_0| < \epsilon, \ \forall m \geq n_0$$

O vetor x_0 é chamado limite de (x_m) e a sucessão (x_m) é dita convergente.

Denota-se por:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_m \quad \text{ou} \quad x_m \to x_0 \text{ quando } m \to \infty$$

Caso contrário, a seqüência (x_m) é dita divergente.
Será deixado como exercício os resultados.

Proposição 6. *Sejam $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_m$ e $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_m$. Então:*

(a) $x_0 + y_0 = \lim_{n\to\infty} (x_m + y_m)$

(b) $\lambda.x_0 = \lim_{n\to\infty} \lambda.x_m, \ \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $x_0.y_0 = \lim_{n\to\infty} (x_m.y_m)$

(d) *Se x_m^i é a i-ésima componente do vetor x_m, então:*

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_m \quad \textit{s.s.s.} \quad x_0^i = \lim_{n\to\infty} x_m^i \quad \textit{para cada} \quad i = 1, ..., n$$

Definição 16. *Uma seqüência (x_m) é limitada, se existe $C > 0$ tal que:*

$$|x_m| \leq C, \ \textit{para todo } m.$$

Definição 17. *Uma seqüência (x_m) é chamada seqüência de Cauchy, se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_m - x_p| < \epsilon, \ \forall m, p \geq n_0$$

Observação 20. *Note que a definição não diz nada a respeito do limite x_0 da sucessão (x_m), e sim do comportamento dos termos da sucessão.*

Observação 21. *O conceito de seqüência de Cauchy e convergência de seqüência são equivalentes em $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1 (Critério de Convergência de Cauchy)**.** *Uma seqüência (x_m) é convergente se e somente se (x_m) é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração - Seja (x_m) uma sucessão convergente. Então, se x_0 é seu limite, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|x_m - x_0| < \epsilon/2, \ |x_p - x_0| < \epsilon/2, \ \ \forall m, p \geq n_0$$

Como $x_m - x_p = (x_m - x_0) + (x_0 - x_p)$, pela desigualdade triangular tem-se que

$$|x_m - x_p| \leq |x_m - x_0| + |x_0 - x_p| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Portanto, (x_m) é uma seqüência de Cauchy.
Reciprocamente, se (x_m) é uma seqüência de Cauchy ela é limitada. De fato, tomando $\epsilon = 1$, pela definição, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|x_m - x_p| < 1, \ \forall m, p \geq n_0$$

Em particular, seja $p = n_0$ e considere o número positivo

$$C = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$$

Então, sendo $x_m = x_{n_0} + (x_m - x_{n_0})$, tem-se que por desigualdade triangular

$$|x_m| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}| \leq C$$

Portanto, $|x_m| \leq C$, para todo m = 1,2,...
Consideramos (x_m) uma sucessão de Cauchy de **números reais**, e $C > 0$ tal que $|x_m| \leq C$, para todo m.
Para cada m, denotamos $y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, ...\}$, então $y_m \leq y_{m+1}$.
Sendo $|x_m| \leq C$, $\forall m$, então $|y_m| \leq C$, $\forall m$.
Assim, a seqüência (y_m) é não decrescente e limitada. Portanto por propriedade de seqüência de números reais, a seqüência (y_m) tem um limite y_0.
Mostra-se agora, que $x_m \to x_0$quando $m \to \infty$. De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|x_m - x_{n_0}| < \epsilon/2, \ \ \forall m \geq n_0$$

Dai,

$$x_{n_0} - \epsilon/2 < x_m < x_{n_0} + \epsilon/2, \ \ \forall m \geq n_0$$

Temos que $x_{n_0} - \epsilon/2$ é um limite inferior e $x_{n_0} + \epsilon/2$ é um limite superior de $\{x_m, x_{m+1}, ...\}$.
Portanto, quando $m \geq n_0$, tem-se

$$x_{n_0} - \epsilon/2 \leq y_m \leq y_0 \leq x_{n_0} + \epsilon/2$$

Logo,

$$|x_m - y_0| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0} - y_0| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

O que mostra que $x_m \to y_0$ quando $m \to \infty$, no caso real.
Para o caso geral, se (x_m) é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, as componentes satisfazem que

$$\left|x_m^i - x_p^i\right| \leq |x_m - x_p|\,, \text{ para cada } i = 1, 2, .., n$$

então as componentes formam uma sucessão de Cauchy $\left(x_m^i\right)$ de números reais. Cada seqüência $\left(x_m^i\right)$ tem um limite y_0^i, para cada i =1, 2,.., n. Logo, pela proprosição anterior, item (d), $x_m \to y_0$ quando $m \to \infty$ ■

Definição 18. *Um conjunto A não vazio é limitado , quando existe $C > 0$ tal que*

$$|x| < C, \ \forall x \in A$$

Definição 19. *O diâmetro de um conjunto limitado A é o número real*

$$diam\ (A) = Sup\,\{|x - y| : x, y \in A\}$$

Teorema 2 (Cantor)**.** *Seja (A_m) uma seqüência de conjuntos fechados tais que*

$$A_1 \supset A_2 \supset .... \quad e \quad \lim_{m\to\infty} diam(A_m) = 0$$

Então, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ contém só um ponto.

Demonstração -Para cada m=1, 2,.. seja $x_m \in A_m$.
Então (x_m) é uma seqüência de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que diam$(A_{n_0} < \epsilon$.
Se $m, p \geq n_0$, então $x_m, x_p \in A_{n_0}$, pois $A_m \subset A_{n_0}$ e $A_p \subset A_{n_0}$. Portanto,

$$|x_m - x_p| < \text{diam}(A_{n_0}) < \epsilon$$

Pelo teorema de convergência de Cauchy, a sucessão (x_m) tem um limite x_0. para cada p=1, 2,..., $x_m \in A_p, \forall m \geq p$, pois $A_m \subset A_p$. Como A_p é fechado, segue-se que $x_0 \in A_p$. Sendo isto verdade para cada p, tem-se $x_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$.

Seja $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, logo $x \in A_m$ e

$$0 \leq |x - x_0| \leq \text{diam}(A_m), \quad \text{para cada } m$$

Como $\text{diam}(A_m) \to 0$ quando $m \to \infty$, resulta que $|x - x_0| = 0$, e assim, $x = x_0$. ■

Exemplo 16. *Sejam n=1 e* $A_m = \{m, m+1, ...\}$. *Temos que* A_m *não é um conjunto fechado e* $A_1 \supset A_2 \supset ....$. *Além disso* A_m *não é limitado. A interseção* $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ *é vazia.*

Definição 20. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto. Um ponto* x_0 *é chamado de* *<u>ponto isolado de A</u>, se existe uma vizinhança* $V = V(x_0)$ *tal que* $A \cap V = \{x_0\}$.

Exemplo 17. *Todo ponto de* $A = \{1, 1/2, .., 1/n, ..\}$ *é um ponto isolado de A.*

Definição 21. *Um ponto* x_0 *é chamado de <u>ponto de acumulação de A</u>, se toda vizinhança de* x_0 *contém um número infinito de pontos de A.*

Observação 22. *Na definição de <u>ponto de acumulação</u>, não é exigido que que o ponto de acumulação* $x_0 \in A$. *Na verdade, mostra-se que os pontos de acumulação estão em* $\overline{A}$.

Proposição 7. x_0 *é um ponto de acumulação de A, se e somente se,* $x_0 \in \overline{A}$ *e* x_0 *não é um ponto isolado de A.*

Demonstração - Suponhamos que x_0 é um ponto de acumulação de A, logo $x_0 \in A'$, como $\overline{A} = A \cup A'$, resulta que $x_0 \in \overline{A}$. Além disso, x_0 não é um ponto isolado de A, pela definição dada.
Agora, consideramos $x_0 \in \overline{A}$ e x_0 não é um ponto isolado de A.
Seja $V_1 = V_1(x_0)$ uma vizinhança qualquer de x_0. Dai, sendo x_0 ponto não isolado, então existe $x_1 \in A \cap V_1$, com $x_1 \neq x_0$. Mostraremos que $A \cap V_1$ contém um número infinito de pontos. De fato, suponhamos o contrário, isto é, tem um número finito de pontos. Logo, $A \cap V_1$ contém finitos pontos $x_1, .., x_p$ diferentes de x_0. Seja $V_\delta = V_\delta(x_0)$ a menor vizinhança de x_0, tal que

$$\delta < \min \{|x_m - x_p|, m = 1, .., p\}$$

Assim, ou $A \cap V_\delta$ é vazio ou $A \cap V_\delta = \{x_0\}$. A primeira possibilidade contradiz que $x_0 \in \overline{A}$, pois dado que $x_0 \in \overline{A}$, implica que $x_0 \in A$ ou $x_0 \in A'$. Mas x_0 não pode estar em A', já que $A \cap V_\delta$ têm finitos pontos. E, se $x_0 \in A$, tem-se que $A \cap V_\delta \neq \emptyset$. Esta segunda possibilidade contradiz o fato de x_0 não ser ponto isolado de A. Portanto, x_0 é ponto de acumulação de A. ■

Exemplo 18. *No conjunto* $A = \{1, 1/2, .., 1/n, ..\}$ *o zero é o único ponto de acumulação de A, o qual não pertence a A.*

Exemplo 19. *Se* $A = \mathbb{Q}$, *qualquer ponto de* $\mathbb{R}$ *é um ponto de acumulação de A.*

A seguir, caracteriza-se por meio de sucessão os pontos de acumulação de um conjunto.

Proposição 8. *x_0 é um ponto de acumulação de A, se e somente se, existe uma sucessão (x_m), com limite x_0, tal que $x_m \in A$ e $x_m \neq x_0$ para todo m.*

Demonstração - (Exercício).

Definição 22 (n-Cubo)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto, definido por*

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \ \left|x^i - x_o^i\right|_{\mathbb{R}} \leq a/2, com\, i = 1,..,n\right\}$$

onde $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ e $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$.

O conjunto I, acima definido, é chamado de n-cubo ou cubo de n lados, centrado em x_0 e comprimento de lado a. note que, se A é qualquer conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, podemos obter $A \subset I$ para algum n-cubo I.

Teorema 3 (Bolzano - Weierstrass)**.** *Todo conjunto infinito é limitado em $\mathbb{R}^n$, têm pelo menos um ponto de acumulação*

Demonstração - Seja A um conjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^n$. Consideramos I_1 algum n-cubo contendo A. Divide-se I_1 em $m = 2^n$ n-cubos fechados e congruentes $I_{11}, I_{12}, ..., I_{1m}$ como na figura acima.
Sendo A um conjunto infinito, segue-se que $A \cap I_{1k}$ é um conjunto infinito para pelo menos um dos k = 1, 2,.., m.
Escolhe-se algum destes k´s e faça $I_{1k} = I_2$. Divide-se, agora, I_2 em $m = 2^n$ n-cubos fechados e côngruos: $I_{21}, ..., I_{2m}$. Como antes, $A \cap I_{2k}$ é infinito para pelo menos um k. Escolhe-se este k e faça $I_{2k} = I_3$. Continuando, obtém-se n-cubos fechados e côngruos:

$$I_1 \supset I_2 \supset ...$$

Tal que $A \cap I_p$ é infinito para cada p = 1, 2,... e diam$(I_p) = 0$ quando $p \to \infty$.
Pelo teorema de Cantor $I_1 \cap I_2 \cap I_3$.... tem um único ponto x_0.
Se $V = V(x_0)$ é uma vizinhança qualquer de x_0, temos que $I_p \subset V$ para p suficientemente grande. Como $A \cap I_p \subset A \cap V$, então $A \cap V$, é um conjunto infinito. Portanto, x_0 é um ponto de acumulação de A. ■

Algumas conseqüências do teorema de Bolzano-Weierstrass.

Corolário 1. *Seja B um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$. Então todo conjunto infinito $A \subset B$ tem pelo menos um ponto de acumulação $x_0 \in B$.*

Demonstração - Como B é um conjunto limitado e $A \subset B$, logo A é limitado. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, A tem um ponto de acumulação x_0.
Por proposição anterior, $x_0 \in \overline{A}$. Dado que B é fechado, resulta que $\overline{A} \subset B$, assim $x_0 \in B$. ■

Corolário 2. *Sejam $A_1, A_2, ...$ conjuntos não vazios, limitados e fechados de $\mathbb{R}^n$, tais que*

$$A_1 \supset A_2 \supset ....$$

Então $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ *não é vazia.*

Demonstração - Para m = 1, 2,... escolhe-se algum ponto $x_m \in A_m$,. Seja $A = \{x_1, x_2, ...\}$. Se A é um conjunto finito, então existe algum $x \in A$ tal que $x = x_m$ repetidas vezes.

Como $A_1 \supset A_2 \supset ....$, logo $x \in A_m$ para todo m. Assim, $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$.

Suponha, agora, que A não é um conjunto finito. Dado que $A_m \subset A_1$, segue que $A \subset A_1$. Como A_1 é limitado, logo A é limitado.

Seja x_0 um ponto de acumulação de A, por corlário anterior, $x_0 \in A_1$, pois A_1 é um conjunto fechado e $A \subset A_1$. Para cada m, o vetor x_0 é, também, um ponto de acumulação do conjunto $B = \{x_m, x_{m+1}, ...\}$.

Dado que $B \subset A_m$ e A_m é fechado, segue-se que $x_0 \in A_m$, para cada m. Portanto, $x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ ■

1.4 Espaço Métrico

4ª Lição

Seja E um conjunto não vazio qualquer. A noção de distância entre dois elementos $a, b \in E$ é definida por uma aplicação $d : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que satisfaz:

(i) $d(a,b) \geq 0$, $\forall a, b \in E$ e $d(a,b) = 0$ *s.s.s.* $a = b$
(ii) $d(a,b) = d(b,a), \forall a, b \in E$
(iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, $\forall a, b, c \in E$

A função d definida em $E \times E$ com valores em $\mathbb{R}$ que satisfaz (i) - (iii) é chamada de uma *métrica* em E.

Definição 23. *Um espaço métrico é um conjunto $E \neq \emptyset$ com uma função d com valores em $\mathbb{R}$ e domínio $E \times E$ satisfazendo as propriedades (i) - (iii).*

Exemplo 20. *Seja $E = \mathbb{R}^n$ e* $d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$, $\forall x, y \in E$.

A função d é chamada de distância euclidiana, e d satisfaz as propriedades (i) - (iii).(verifique!)

Se $A \subset \mathbb{R}^n$, a distância euclidiana, também, define uma métrica em A. Portanto, qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, com a distância euclidiana é um espaço métrico.

Exemplo 21. *Seja A um conjunto qualquer não vazio. em $A \times A$ define-se*

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & se\ a \neq b \\ 0, & se\ a = b \end{cases}$$

Note que
(a) *$d(a,a) = 0$ e $d(a,b) = 1 > 0$ se $a \neq b$, logo verifica (i).*
(b) *$d(a,b) = d(b,a) = 1$, se $a \neq b$ e $d(a,b) = d(b,a) = 0$, se $a = b$, o que acarreta (ii).*
(c) *Também, se $a \neq b \neq c$, então $d(a,c) = 1 < 1+1 = d(a,b) + d(b,c)$. Nos outros casos, (iii) também é verificada. Portanto, a aplicação é uma métrica ("distância"), a qual é bastante artificial.*

Uma vizinhança $V = V_\delta(a)$ em um espaço métrico é o conjunto

$$V = V_\delta(a) = \{b \in E, d(a,b) < \delta\} \text{ com } \delta > 0$$

No primeiro exemplo desta parte, vizinhança de x são as usuais, enquanto no segundo exemplo, uma vizinhança $V = V_\delta(a) = \{a\}$, se $0 < \delta < 1$.

Os conceitos de convergência de seqüências e seqüências de Cauchy em um espaço métrico E são definidos de forma similar ao caso de $E = \mathbb{R}^n$, ou seja.

Definição 24. *Seja $(a_m), m = 1, 2, ..$ uma sucessão em um espaço métrico E. Se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_m, a_0) < \epsilon$, $\forall m \geq n_0$, então (a_m) é convergente com limite a_0.*

Definição 25. *Se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_m, a_p) < \epsilon$, $\forall m, p \geq n_0$, então (a_m) é uma seqüência de Cauchy.*

Definição 26. *Seja E um espaço métrico, com métrica d. Diz-se que E é completo, se toda seqüência de Cauchy (a_m), com $a_m \in E$, converge para um limite $a_0 \in E$.*

Exemplo 22. *O critério da convergência de Cauchy garante que $\mathbb{R}^n$, com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.*

1.4.1 Espaço Vetorial Normado

Definição 27. *Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial V com uma função definida em V com valores em $\mathbb{R}$, denotada por $\|.\|$ tal que:*

(a) $\|u\| > 0,\ \forall u \in V,\ u \neq \theta_V$
(b) $\|\lambda . u\| = |\lambda|_{\mathbb{R}} . \|u\|,\ \forall \lambda \in \|u\|,\ u \in V$
(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall u \in V$

Define-se a "distância"entre $u, v \in V$ por $d(u, v) = \|u - v\|$.
assim, V torna-se um espaço métrico normado.

Exemplo 23. *Seja $V = \mathbb{R}^n$, com a norma de um vetor $x = (x^1, .., x^n)$ dada por*

$$\|x\| = max\left\{|x^1|_{\mathbb{R}}, ..., |x^n|_{\mathbb{R}}\right\}$$

Esta é uma das muitas normas (não usuais) que podem ser definidas em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 24. *O seguinte espaço V é uma versão infinitamente dimensional do $\mathbb{R}^n$. Considere uma seqüência de números reais denotada por $X = (x^1, .., x^n, ...)$. Se $Y = (y^1, .., y^n, ...)$ é outra seqüência de números reais, então a soma é definida por*

$$X + Y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, ..., x^n + y^n, ...)$$

Também, define-se o produto por um escalar

$$\lambda.X = (\lambda.x^1, \lambda.x^2, ..., \lambda.x^n, ...)$$

O espaço V com a norma

$$(*) \quad \|X\| = \left[\sum_{m=1}^{\infty} (x^m)^2\right]^{1/2}$$

é um espaço vetorial normado. Note que V é formado pelas sucessões tais que a soma de quadrados das coordenadas x^m de X é finita.

Definição 28. *Um espaço vetorial V (infinito dimensional) completo (na mètrica $d(u, v) = \|u - v\|$) é chamado de espaço de Banach.*

O espaço $\mathbb{R}^n$ com qualquer norma, é um espaço de Banach finito.
O espaço do exemplo (), é um espaço de Banach.

1.4.2 Normas não Euclidianas em $\mathbb{R}^n$

A norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é dada por $\|x\| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde

$$|x| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right]^{1/2}$$

Sendo a métrica d dada por

$$d(x, y) = |x - y| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

Enquanto a norma definida por

$$\|x\| = \max\left\{|x^1|_{\mathbb{R}}, ..., |x^n|_{\mathbb{R}}\right\}$$

não é euclidiana. Outros exemplos, há de norma em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 25. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, então a função*

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|_{\mathbb{R}}$$

satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) da definição de norma. Logo, é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

No espaço normado $\mathbb{R}^n$ as normas são equivalentes. Precisamente, tem-se.

Teorema 4. *Dada qualquer norma $\|.\|$ em $\mathbb{R}^n$, então existem números reais positivos k_1 e k_2 tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se*

$$(1) \qquad k_1 |x| \leq \|x\| \leq k_2 |x|$$

onde $|x|$ é a norma euclidiana.

Demonstração - A relação (1) é obviamente válida quando $x = \theta$.
Suponha $x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta$. Sabe-se que x é dado de modo único por:
$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n$, onde e_i são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$.
Pela desigualdade triangular, resulta

$$\|x\| \leq \left|x^1\right|_{\mathbb{R}} \|e_1\| + \left|x^2\right|_{\mathbb{R}} \|e_2\| + ... + |x^n|_{\mathbb{R}} \|e_n\|$$

Como $\|e_i\| = 1$ e $\left|x^i\right|_{\mathbb{R}} \leq |x|$ para todo i = 1, 2,.., n, então $\|x\| \leq n\,|x|$.
Denotando n fixado por k_2 resulta

$$(2) \qquad \|x\| \leq k_2 |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dai, tem-se que a função $\|.\|$ é tal que

$$\|x - y\| \leq k_2 |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Portanto, para cada $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \epsilon/k_2 > 0$, conclui-se que $\|.\|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. Assim, $\|.\|$ tem um mínimo no conjunto compacto
$B = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$.
Seja $k_1 = \min\{\|x\|, |x| = 1\}$. Como $x \neq \theta$ segue-se que $k_1 > 0$. Suponha $C = 1/|x|$. Temos que $\|C.x\| = C.\|x\| = 1$. Dai e definição de k_1:

$$(3) \qquad \|C.x\| \leq k_1$$

Por outro lado, pela propriedade (b) da definição de norma, tem-se

$$(4) \qquad \|C.x\| = |C|_{\mathbb{R}} \|x\|$$

De (39 e (4) e definição de C, obtém-se $\|C.x\| = \dfrac{1}{\|x\|} \|x\| \geq k_1$.
Portanto,

$$(5) \qquad \|x\| \geq k_1 |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

De (2) e (5) conclui-se (1). ■