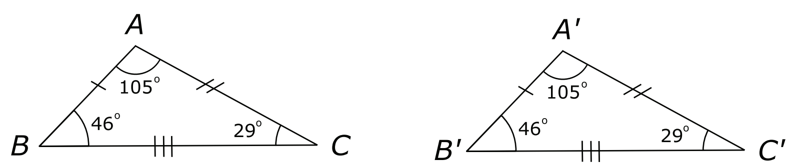
Aula 2 – Congruência de Triângulos

A idéia de congruência entre segmentos, ângulos e triângulos formou-se intuitivamente, levando-se em conta que dois segmentos congruentes, dois ângulos congruentes e dois triângulos congruentes podem ser superpostos por meio de um deslocamento conveniente.

O conceito abstrato de congruência entre triângulos é definido da seguinte maneira:
Dois triângulos são denominados congruentes se tem ordenadamente congruentes os três lados e os três ângulos. Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.



Indicamos: $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$ se $\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{cases}$ e $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$

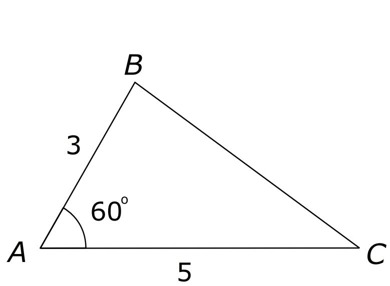
Observação:
Em dois triângulos congruentes, são congruentes entre si:
a) os lados opostos a ângulos congruentes;
b) os ângulos opostos a lados congruentes;

Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá 5 condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. Estas condições são denominadas casos ou critérios de congruência.

1º Caso (LAL)
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.
Este caso é normalmente dado como *postulado* e indica que se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre estes dois lados, então o lado restante e os dois ângulos também são ordenadamente congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso LAL.



Esquema de aplicação.

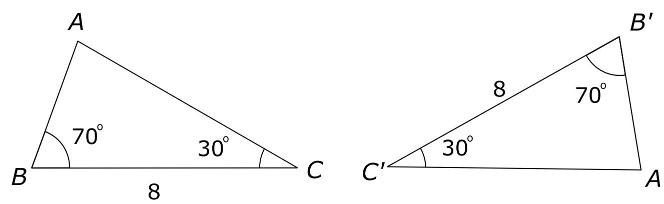
$$\left\{\begin{array}{c} AB \equiv A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC \equiv B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right.$$

Os demais casos serão teoremas que inicialmente vamos apresentá-los. Alguns desses casos serão provados e alguns serão deixados como exercícios.

2º Caso (ALA)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso ALA.



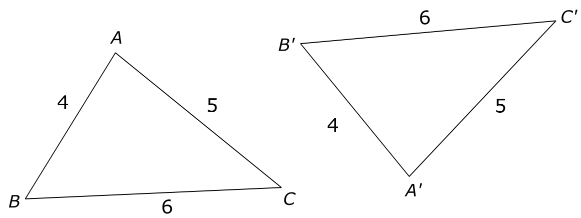
Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC \equiv B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} AB \equiv A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right.$$

3º Caso (LLL)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso LLL.



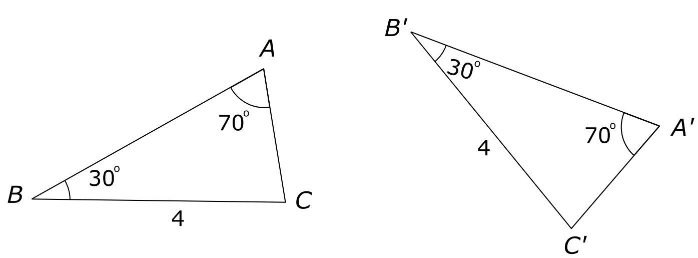
Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{array}\right. \underset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right.$$

4º Caso (LAAo)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso LAAo.



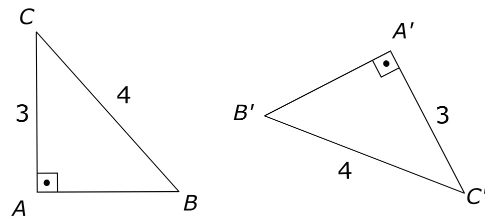
Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c} BC \equiv B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right. \underset{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \hat{C} = \hat{C}' \\ AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right.$$

5º Caso (Caso Especial)

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso especial.

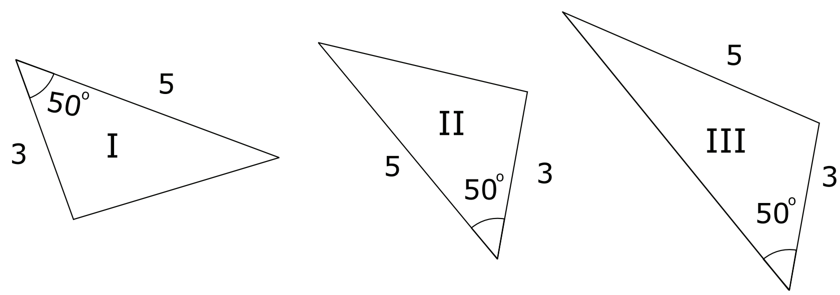


Aplicação nos problemas
Se, ao resolver um problema, sabe-se que os elementos de dois triângulos verificam as condições de um dos casos de congruência:
$1^{\underline{o}}$) pode-se afirmar que os triângulos são congruentes.
$2^{\underline{o}}$) conclui-se daí que os outros elementos desses triângulos, que não se conhecem, são dois a dois congruentes.

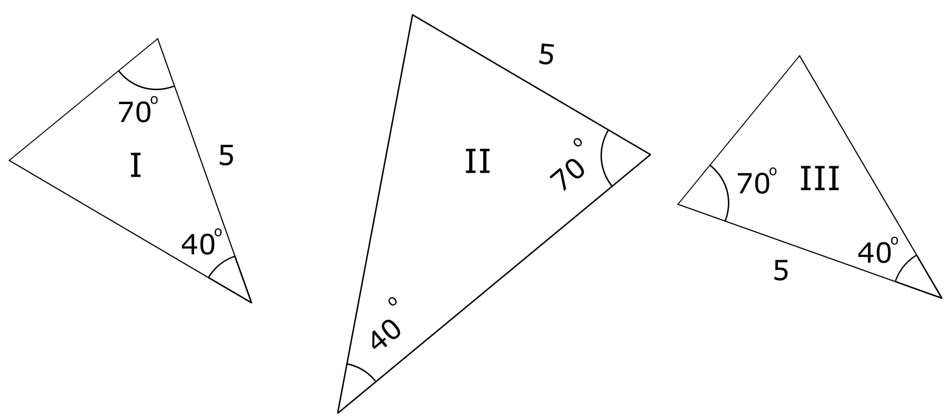
Exercícios Resolvidos

1. Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.

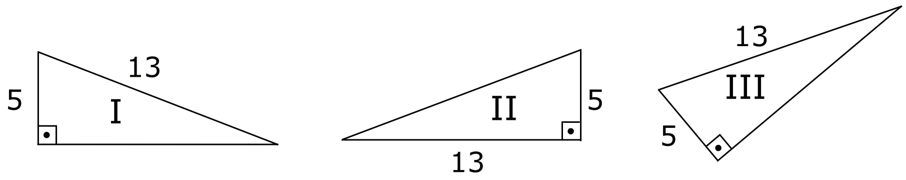
(a)



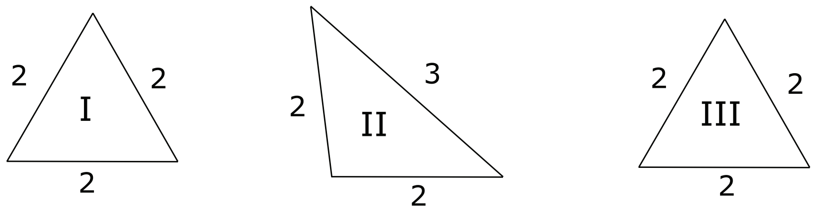
(b)



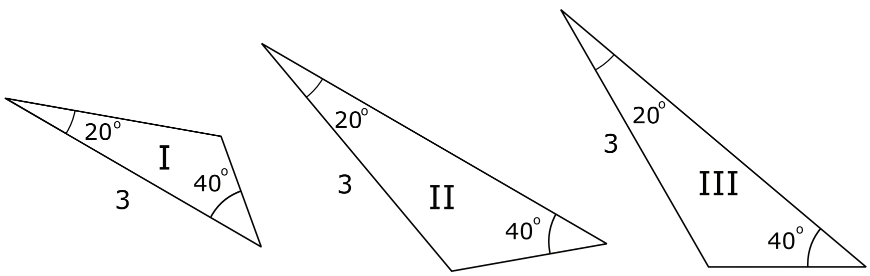
(c)



(d)



(e)



Solução:

(a) $\Delta I \equiv \Delta II$ pelo caso LAL.

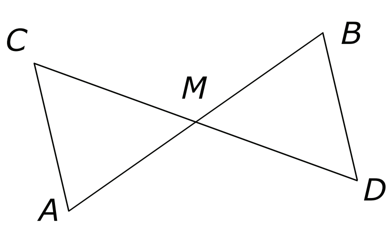
(b) $\Delta I \equiv \Delta III$ pelo caso ALA.

(c) $\Delta I \equiv \Delta III$ pelo caso especial.

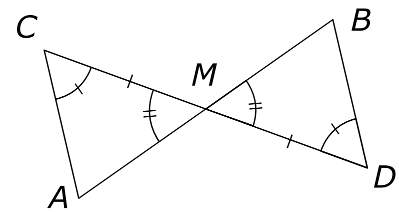
(d) $\Delta I \equiv \Delta III$ pelo caso LLL.

(e) $\Delta II \equiv \Delta III$ pelo caso LAAo.

2. Na figura, M é o ponto médio do segmento CD, ou seja, $CM \equiv MD$. $A\hat{C}M \equiv B\hat{D}M$ e os pontos A, M e B são colineares.
Prove que $AM \equiv MB$.



Solução:
Seja a figura dada:



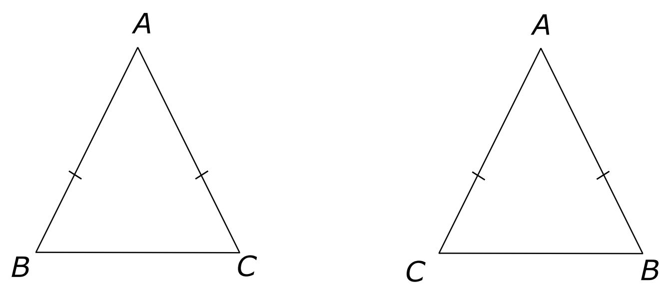
Temos que:

$$\left.\begin{array}{rl} A\hat{C}M & \equiv B\hat{D}M \text{ (hipótese)} \\ CM & \equiv DM \text{ (hipótese)} \\ A\hat{M}C & \equiv B\hat{M}D \text{ (opostos pelo vértice)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underset{\text{(ALA)}}{\Longrightarrow} \Delta ACM \equiv \Delta DBM \\ \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} AM \equiv MB \end{array}$$

Note que M é ponto médio do segmento AB.

3. Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Solução:
Seja o $\Delta\ ABC$ isósceles de base BC e o triângulo isósceles ACB, conforme figura.



Temos:

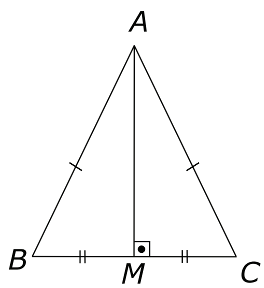
$$\left\{\begin{array}{rl} AB & \equiv AC \text{ (hipótese)} \\ \hat{A} & = \hat{A} \text{ (ângulo comum)} \\ AC & \equiv AB \text{ (hipótese)} \end{array}\right. \underset{\text{(LAL)}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \hat{B} = \hat{C}$$

4. Prove que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

Solução:
Seja o triângulo isósceles de base BC. Tracemos a mediana AM relativa à base e provemos que AM é bissetriz e altura.

Considere os triângulos ABM e ACM, então:

$$\begin{cases} AB \equiv AC \text{ por ser isósceles do } \Delta ABC \\ BM \equiv CM \text{ (Definição de mediana)} \\ AM \equiv AM \text{ lado comum} \end{cases}$$



Pelo caso (LLL), temos $\Delta\ ABM \equiv \Delta\ ACM$.

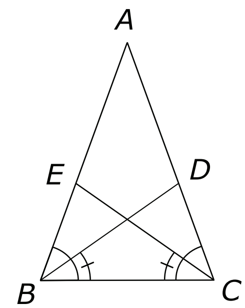
Da congruência desses dois triângulos decorrem:
1) $B\hat{A}M \equiv C\hat{A}M$ e daí AM é bissetriz.
2) $A\hat{M}B \equiv A\hat{M}C$ e que são ângulos adjacentes, congruentes e suplementares, então são retos.

Logo $AM \perp BC$ e portanto AM é altura.

5. Dado um triângulo isósceles ABC de base BC, considere as bissetrizes internas BD e CE desse triângulo. Prove que $BD \equiv CE$.

Solução:
Seja o triângulo isósceles ABC de base BC e as bissetrizes internas BD e CE.

Considere os triângulos BCD e CBE.



Temos que:

$$\left\{\begin{array}{rl} A\hat{B}C & \equiv A\hat{C}B \text{ (ângulos da base) Exercício 3} \\ BC & \equiv BC \text{ (comum)} \\ B\hat{C}E & \equiv C\hat{B}D \text{ (metade dos ângulos da base)} \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta BCD \equiv \Delta CBE$$

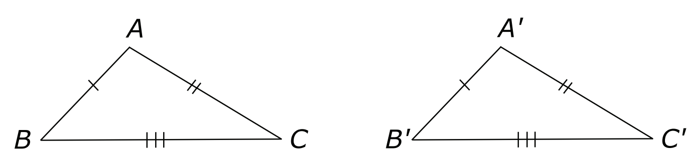
e daí $BD \equiv CE$ (definição de triângulos congruentes)

6. Demonstre o caso LLL.

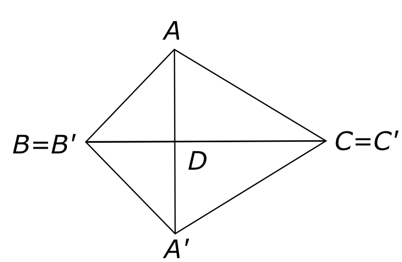
Solução:

Hipótese: $\left\{\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{array}\right.$ Tese: $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$.



Transportemos o $\Delta A'B'C'$ de modo que o lado $B'C'$ coincida com BC, ficando o vértice A' no semiplano oposto ao de A, em relação a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Unimos os pontos A e A', cujo segmento interceptará a reta suporte de lado BC num ponto D, conforme figura.



Dessa construção e sendo:

$$AB \equiv A'B' \qquad \text{e} \qquad AC \equiv A'C'$$

resulta que os triângulos ABA' e ACA' são isósceles e, portanto

$$B\hat{A}A' \equiv B\hat{A}'A \qquad \text{e} \qquad C\hat{A}A' \equiv C\hat{A}'A$$

Concluimos daí que

$$B\hat{A}C \equiv B'\hat{A}'C'$$

ou seja,

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

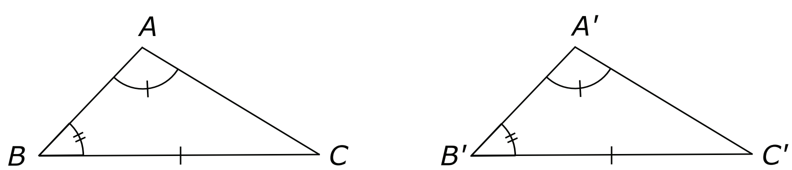
Logo pelo caso LAL, temos:

$$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$$

7. Demonstre o caso LAAo.

Solução:

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura e suponhamos $BC \equiv B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$.



Vamos provar que $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$.
Para provar essa congruência, basta provar que $AB \equiv A'B'$, recaindo no caso LAL.
Transportemos então o $\Delta\ A'B'C'$ sobre o $\Delta\ ABC$, caindo o lado $B'C'$ sobre seu congruente BC de modo a coincidirem os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$. Seja D a nova posição do ponto A', e provemos que D coincide com A.

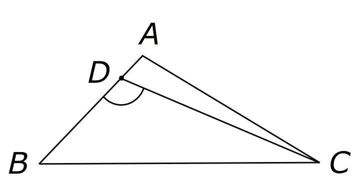
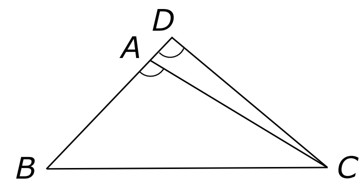


Fig. (∗)

De fato, a não coincidência de D com A conduz a um absurdo, pois se D ficasse entre B e A, Figura (*), o ângulo $B\hat{D}C$ externo em relação ao $\Delta\ CDA$ seria maior que $\hat{A}$ (resultado anterior) (1).
Por outro lado, se D ficasse no prolongamento de BA, teríamos $\hat{A}$ maior que $B\hat{D}C$ (resultado anterior) (2).

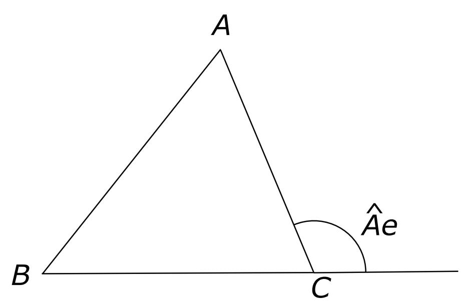


As desigualdades (1) e (2) são absurdas, pois por hipótese o ângulo $B\hat{D}C$, que é a nova posição do ângulo $\hat{A}$' após o deslocamento, é congruente ao ângulo $\hat{A}$.
Portanto o ponto A', estando sobre AB e não podendo ficar nem antes nem depois do ponto A, deverá coincidir com A.
Daí,

$$AB \equiv A'B'$$

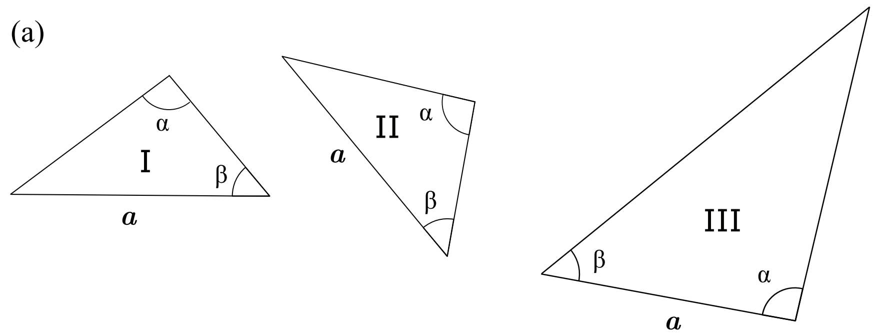
Então, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo casos LAL.

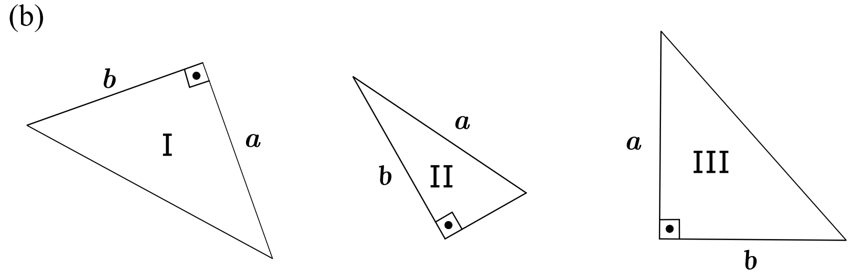
Nota:
Qualquer ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer interno não adjacente, já que na Aula 1 vimos que: $\hat{A}e = \hat{B} + \hat{C}$.



Exercícios Propostos

1. Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.

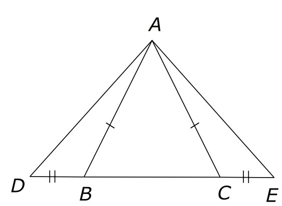




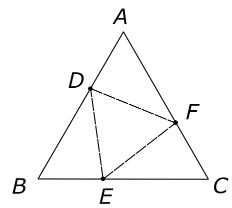
2. Prove que, se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.

3. Prove que, se um triângulo tem os três ângulos congruentes entre si, então ele é equilátero.

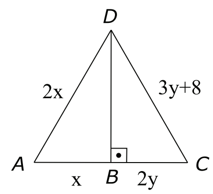
4. Considere o triângulo isósceles ABC da figura. Seja os segmentos BD e CE sobre a base BC congruentes entre si. Prove que o triângulo ADE é isósceles.



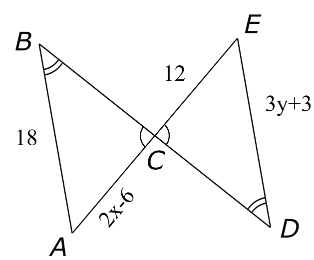
5. Sobre os lados de um triângulo equilátero, tomam-se três pontos D, E e F conforme figura. Sendo $AD \equiv BE \equiv CF$, prove que o triângulo DEF é equilátero.



6. Na figura, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcular x e y.

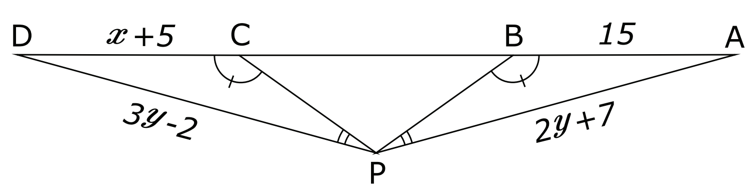


7. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.

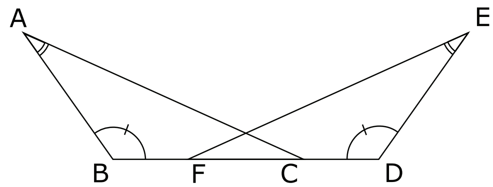


8. Prove que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana e altura.

9. Na figura, o triângulo PCD é congruente ao triângulo PBA. Determine os valores de x, y e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD.



10. Na figura, sendo $\overline{BF} = \overline{CD}$, $m(A\widehat{B}C) = m(F\widehat{D}E)$ e $m(B\widehat{A}C) = m(D\widehat{E}F)$, prove que $\overline{AC} = \overline{EF}$.



11. Prove o caso ALA.

12. Prove o caso especial de congruência.

Gabarito

1. a) $\Delta I \equiv \Delta II$ Caso LAAo.
   b) $\Delta I \equiv \Delta III$ Caso LAL.

2. Demonstração.

3. Demonstração.

4. Demonstração.

5. Demonstração.

6. $x = 16$ e $y = 8$.

7. $x = 9$ e $y = 5$.

8. Demonstração.

9. $x = 10$, $y = 9$ e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD é 1.

10. Demonstração.

11. Demonstração.

12. Demonstração.