



Departamento de Matemática Aplicada  
VR Cálculo II-B  
Prof. Sérgio Almaraz - 09/01/2014

- **Não é permitido** sair da sala durante a prova nem usar calculadora.
- Respostas sem uma **justificava correta** não serão consideradas.

1. (a) (1,0 pts) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 - y^2)}{x + y}$ .

(b) (1,5 pts) Decida se a seguinte função é diferenciável em  $(0, 0)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x^2 + uy^2 = v \\ x + y^2 = u. \end{cases}$$

(a) (1.5 pontos) Use o teorema da função implícita para mostrar que esse sistema define implicitamente  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  em uma vizinhança de  $(u = 0, v = 1)$  tal que  $x(0, 1) = y(0, 1) = -1$ .

(b) (1.0 pontos) Determine expressões para as funções  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  do item anterior.

3. (a) (1.0 pontos) Seja  $z = f(u - v, v - u)$ . Verifique que  $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$

(b) (1.0 pontos) Admita que  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ , para todo  $(x, y)$ . Mostre que  $g(t) = f(t, 2/t)$ ,  $t > 0$ , é constante.

4. (a) (2.0 pontos) Seja  $c > 0$ . Determine  $(x, y)$  (em termos de  $c$ ) que maximiza a função  $f(x, y) = x^2 y^2$  restrita a  $x^2 + y^2 = c$ .

(b) (1.0 pontos) Usando o resultado do item anterior, mostre que vale  $|xy| = \sqrt{x^2 \cdot y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .