



Departamento de Matemática Aplicada
2a VE Cálculo II-B
Prof. Sérgio Almaraz - 19/12/2013

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e o vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$.

- (a) (1.0 ponto) Calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ de f na direção de \vec{u} no ponto $(0, 0)$.
- (b) (0.5 ponto) Calcule o gradiente $\nabla f(0, 0)$ nesse ponto.
- (c) (0.5 ponto) Conclua que f não é diferenciável nesse ponto, sem usar a definição de diferenciabilidade.
2. Considere $R(x, y)$ o retângulo inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em \mathbb{R}^2 , com um vértice (x, y) , $x, y > 0$, sobre essa elipse.
- (a) (0.5 ponto) Determine a área $A(x, y)$ de $R(x, y)$.
- (b) (2.0 ponto) Determine (x_0, y_0) , $x_0, y_0 > 0$, tal que $A(x_0, y_0) \geq A(x, y)$ para todo (x, y) sobre a elipse e com $x, y > 0$.
3. Considere a função $f(x, y) = -y^2 + (y - 1)^3 x^2$.
- (a) (0.5 ponto) Determine o único ponto crítico de f .
- (b) (1.0 ponto) Decida se esse ponto crítico é um máximo local, mínimo local ou ponto de sela.
- (c) (1.0 ponto) Mostre que esse ponto não é máximo nem mínimo global.
4. Considere o sistema

$$\begin{cases} u^2 - 2uy - xy = v + 1 \\ v^2 + 2x = y. \end{cases}$$

- (a) (1.0 ponto) Mostre que esse sistema define implicitamente $(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ em uma vizinhança de $(x = -1, y = -1)$ tal que $f(-1, -1) = (1, 1)$.
- (b) (1.0 ponto) Mostre que a Jacobiana $df_{(-1, -1)}$ de f no ponto $(-1, -1)$ vale

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/8 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- (c) (1.0 ponto) Calcule, usando uma função afim, um valor aproximado de $f(-1.02, -0.98)$.